Développement : Probabilité pour que deux entiers soient premiers entre eux

RM

2022-2022

Référence

1. Oraux X-ENS 1 page 186
2. Oraux X-ENS tome 1 algèbre (pareille)

Énoncé :

Pour $n \geq 1$, on note r_n la probabilité pour que deux entiers choisis aléatoirement dans $[\![1\,;n]\!]$ soient premiers entre eux. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$

Énoncé du livre/Plan :
Pour $n \geq 1$, on note r_n la probabilité pour que deux entiers choisis aléatoirement dans $[\![1\,;n]\!]$ soient premiers entre eux. D'autre part, on définit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ ainsi : $\mu(1) = 1$,$\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier (facteur carré) et $\mu(p_1...p_r) = (-1)^r$, si les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts.

1. Montrer que $r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2$
2. Calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$

Résolution :

Lemme (Formule du crible) 1 : Soit $U_1, ..., U_k$ des ensembles finis. Alors on que le cardinal de la réunion des U_i est donné par :

$$Card(\bigcup_{i=1}^{k} U_i) = \sum_{\emptyset\neq I\subset[\![1\,;k]\!]} (-1)^{Card(I)+1} Card(\bigcap_{i\in I} U_i)$$

1. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = \{(a, b) \in [\![1\,;n]\!]^2, a \wedge b = 1\}$. On a donc $r_n = \frac{CardA_n}{n^2}$. Soit $p_1, ..., pk$ les nombres premiers inférieurs à n.
   Enfin, on pose $U_i = \{(a, b) \in [\![1\,;n]\!]^2, p_i|a \text{ et } pi|b\}$.
   On a bien que $A_n = \complement(\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$. En effet, si (a, b) appartient à ce complémentaire, cela signifie qu'il n y a aucun nombre premiers $p_1, ..., p_k$ qui divise a et b. Or par décomposition en produit de facteurs premiers, si il n y a aucun facteur premiers commun dans la décomposition a et b, c'est donc qu'ils n'ont aucun diviseur en commun et on a donc bien que a et b sont premiers

entre eux.
Utilisons maintenant la formule du crible donné en lemme. Calculons alors $Card(\bigcap_{i\in I} U_i)$

$$\begin{array}{rcl} Card(\bigcap_{i\in I} U_i) & = & \{(a,b)\in [\![1\,;n]\!], \forall i\in I, p_i|a \text{ et } p_i|b\} \\ & = & \{(a,b)\in [\![1\,;n]\!], \prod_{i\in I} p_i|a \text{ et } \prod_{i\in I} p_i|b\} \end{array}$$

On compte alors tous les k tel que $k\times\prod_{i\in I} p_i \leq n$. Il y en a donc $\lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\rfloor$ comme k est entier on prends bien la partie entière de ce nombre. Étant donné que se sont la quantité de valeur possible pour a et b , on met le tout au carré et on obtient donc que $Card(\bigcap_{i\in I} U_i) = \lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\rfloor^2$.
La formule du crible nous permet d'obtenir :

$$\begin{array}{rcl} CardA_n & = & n^2 - Card(\bigcup_{i=1}^{k} U_k) \\ & = & n^2 - \sum_{\emptyset\neq I\subset[\![1\,;k]\!]} (-1)^{Card(I)+1} Card(\bigcap_{i\in I} U_i) \\ & = & n^2 - \sum_{\emptyset\neq I\subset[\![1\,;k]\!]} (-1)^{Card(I)+1} \lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\rfloor^2 \\ & = & n^2 + \sum_{\emptyset\neq I\subset[\![1\,;k]\!]} (-1)^{Card(I)} \lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\rfloor^2 \\ & = & n^2 + \sum_{\emptyset\neq I\subset[\![1\,;k]\!]} \mu(\prod_{i\in I} p_i) \lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\rfloor^2 \\ & = & \sum_{d=1}^{n} \mu(d)\lfloor \frac{n}{d}\rfloor^2 \end{array}$$

Le passage de l'avant dernière ligne à la dernière ligne s'obtient de la manière suivante : Le 1er terme (d=1) donne le n^2 du début. Ensuite si d est sans facteur carré, alors c'est un produit de p_i est c'est donc égale, et si d possède un facteur carré, alors $\mu(d) = 0$. On a donc bien seulement les d qui sont produit de p_i sans facteur carré qui sont comptées. On a bien tous les nombres entre 1 et n décomposé de cette manière et donc l'égalité.
On en déduit la probabilité r_n :

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\lfloor \frac{n}{d}\rfloor^2$$

2. On pose $S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$. On a donc que $S(1) = 1$ et on va montrer que $S(n) = 0$ pour $n \geq 2$.
Tout d'abords, si n est premiers, alors $S(n) = \mu(1) + \mu(n) = 1 + (-1)^1 = 0$ et c'est donc vrai. Si n n'est pas premier, on considère sa décomposition en produit de facteur premiers : $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ avec donc $p_1, ..., p_k$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, ..., \alpha_k$ des entiers strictement positifs. Or $\mu(d)$ est non nul si d est sans facteur carré, c'est-à-dire si $d = \prod_{i\in I} p_i$ ou $I \subset [\![1\,;k]\!]$. On a donc $\mu(d) = (-1)^{Card(I)}$. Cela correspond donc à choisir i nombre entre $p_1, ..., p_k$. Il y a donc $\binom{k}{i}$ choix possible. On en déduit que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i = (1-1)^k = 0$$

On a donc que $\sum_{d|n} \mu(d) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{array}\right.$

3. Pour l'étude asymptotique de r_n, il paraît naturel de remplacer $\frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2$ par son équivalent $\frac{1}{d^2}$. La différence est alors

$$\left|r_n - \sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| = \left|\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right|$$

comme $\lfloor\frac{n}{d}\rfloor > \frac{n}{d} - 1 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}(\frac{n}{d}-1)^2 < \lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{d^2} - 2\frac{n}{d} + 1 < \lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{d^2} - \frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 \text{ on a multiplié par } \frac{1}{n^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 - \frac{1}{d^2}\end{aligned}$$

De plus $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{n^2}\frac{n^2}{d^2} = \frac{1}{n^2}(\frac{n}{d})^2 \geq \frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2$. On en déduit donc que

$$\frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0$$

On peut alors trouver la majoration suivante

$$\left|r_n - \sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \sum_{d=1}^{n}\left|\mu(d)\left(\frac{1}{n^2}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right| \leq \sum_{d=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{dn}\right) \leq \frac{2}{n}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d} + \frac{1}{n} = O\left(\frac{lnn}{n}\right)$$

Comme la somme partielle de la série harmonique est équivalente à lnn. Il en résulte donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$(la série est absolument convergente).
La quantité $\frac{6}{\pi^2}$ est l'inverse de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
Cela nous invite à calculer le produit des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$.
Les familles $\left(\frac{\mu(d)}{d^2}\right)_{d\geq1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq1}$ sont sommables, donc la suite double $\left(\frac{\mu(d)}{d^2n^2}\right)_{n,d\geq1}$ l'est aussi et elle est justifiable du théorème d'associativité :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{d,n\geq1}\frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{d\geq1, d|p}\frac{\mu(d)}{p^2} \\ &= \sum_{p\geq1}\sum_{d|p}\frac{\mu(d)}{p^2} = \sum_{p\geq1}\frac{1}{p^2}\left(\sum_{d|p}\mu(d)\right) = 1\end{aligned}$$

d'après le calcul de la question précédente.
On en déduit le résultat final recherché :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}}$$